БИЕНИЯ КАК ИНДИКАТОР РАЗМЕРНОСТИ ИНТЕРВАЛА

Соотношение между звуками, которое мы уже назвали унисоном и примой, в музыкальной акустике имеет ещё одно наименование. Вследствие того, что эти звуки не имеют разницы ни по высоте, ни в частотах гармоник основных тонов, ни в частотах гармоник одноимённых обертонов, расстояние между ними называют также нулевым интервалом. На нашем «дуохорде» такой интервал будет звучать, когда подвижной порожек будет находиться в исходной позиции, то есть рабочие участки обеих струн будут одинаковы. Но едва подвижной порожек будет сдвинут с места, как в совместном звучании обеих струн сразу же появятся биения и звуки частично утеряют полное интонационное сходство; один звук останется прежним, а другой зазвучит чуточку выше. Следовательно, интервал станет уже не нулевым. А прима он или какой-то другой интервал – это зависит от того, в контексте какой звуковысотной системы рассматривать возникшую ситуацию. Поскольку мы рассматриваем исключительно европейский классический (не экспериментальный) музыкальный строй, то в нём возникший интервал – пока ещё прима. Так как звуки стали разновысокими, теперь обозначения гармоник основных тонов $Г_1$ и $Г_1$ удобнее заменить на $Г^н_1$ и $Г^в_1$. Гармоники обертонов тоже. И тогда, если частота $Г^н_1$ составляет, предположим, 100 *Гц*, а частота $Г^в_1$ 101 *Гц*, то между одноимёнными гармониками возникнут следующие темпы биений: между $Г^н_1$ и $Г^в_1$ 1 *б/сек.*, между $Г^н_2$ и $Г^в_2$ 2 *б/сек.*, между $Г^н_3$ и $Г^в_3$ 3 *б/сек.* и т. д. Поскольку все эти и другие неназванные биения синтактны, они в конечном итоге уложатся в совместный темп с той самой высокой частотой, какую способен различить слух. При этом унисоны, которые ранее существовали между всеми одноимёнными (с одинаковыми номерами) гармониками, теперь полностью исчезли. Но они возникли между гармониками разноимёнными. Слух контролировать их не может, поскольку они возникают в парах очень отдалённых и потому непрослушиваемых гармоник, но факт их возникновения подтверждает математика. Например, при постоянной частоте $Г^н_1$ 100 *Гц* и изменяющейся частоте $Г^в_1$ 101,01 *Гц* унисон существует между $Г^н_{100}$ и $Г^в_{99}$, при частоте $Г^в_1$ 101,02 *Гц* унисон уже между $Г^н_{99}$ и $Г^в_{98}$, при частоте $Г^в_1$ 101,03 *Гц* между $Г^н_{98}$ и $Г^в_{97}$, при частоте $Г^в_1$ 101,042 *Гц* между $Г^н_{97}$ и $Г^в_{96}$ и т. д. Заметим, что рассматриваемый интервал всё ещё продолжает оставаться примой, хотя теперь с акустической точки зрения её следует именовать уже расширенной. Граница, до которой расширяемый интервал – ещё прима, а после которой он уже малая секунда, пролегает по логарифмической «середине» полутона, где изменяемая частота $Г^в_1$ составит 102,93 *Гц* и унисон установится между $Г^н_{36}$ и $Г^в_{35}$. Расслышать этот унисон мы тоже пока не смогли бы, поэтому иного способа определить границу между примой и малой секундой не существует, кроме как вычислить её математически. Но настроить

интервал шириной в ½ полутона вполне возможно, если расслышать биения между $Г^{н}_{1}$ и $Г^{в}_{1}$ (что несложно, так как они «первоплановые», то есть самые яркие из всех) и найти способ установить их нужный темп – который в нашем случае составляет 2,93 *б/сек.* (Здесь несложно усмотреть намёк на возможность рассчитать модель звукоряда и выполнить строй с делением октавы на любое количество частей, например, создать так называемую микрохроматическую темперацию, применяемую в неевропейских, – в частности, интервалы шрути в индийских рагах – и некоторых европейских экспериментальных музыкально-звуковых системах. О математических средствах такого моделирования и технологических средствах создания строя на основе таких моделей мы поговорим позже).

Когда повышаемый звук пересечёт вышеописанную межинтервальную границу, интервал перестанет быть расширенной примой и превратится в суженную малую секунду. А когда подвижной порожек окажется в точке деления струны на 16 частей, то есть разделит струну на два участка, $^{1}/_{16}$ и $^{15}/_{16}$, и таким образом соотношение между длинами рабочих участков струн составит 16:15, унисон установится между $Г^{н}_{16}$ и $Г^{в}_{15}$ (сразу же обратим внимание на совпадение численных показателей длин рабочих участков и номеров «интервалоопределяющих» гармоник, которые далее мы будем называть интервалообразующими). Этот унисон мы тоже пока не расслышим сквозь множество биений в пáрах несовпадающих гармоник, более близких к слуху. Далее постепенно расширяемый интервал превратится в расширенную малую секунду, затем с переходом повышаемым звуком очередной межинтервальной границы он прекратит существование как малая секунда и превратится в большую секунду, сначала суженную, потом натуральную, со всё ещё неконтролируемым на слух унисоном между $Г^{н}_{9}$ и $Г^{в}_{8}$, потом расширенную. В малой терции возникновение унисона между $Г^{н}_{6}$ и $Г^{в}_{5}$ слух будет уже достаточно уверенно контролировать; в большой терции (унисон между $Г^{н}_{5}$ и $Г^{в}_{4}$) он будет делать это ещё более уверенно; в кварте (унисон между $Г^{н}_{4}$ и $Г^{в}_{3}$) слуховому контролю унисона практически уже ничто не помешает; в тритоне (унисон между $Г^{н}_{7}$ и $Г^{в}_{5}$) сложности с «зашумлением» звучания более первоплановыми биениями вернутся; в квинте (унисон между $Г^{н}_{3}$ и $Г^{в}_{2}$) в момент возникновения унисона биения из звучания исчезнут вовсе; в малой сексте (унисон между $Г^{н}_{8}$ и $Г^{в}_{5}$) опять возникнут некоторые сложности; в большой сексте (унисон между $Г^{н}_{5}$ и $Г^{в}_{3}$) сложности с контролем унисона ещё раз значительно уменьшатся; но далее, в обеих септимах, контролировать унисон снова станет невозможным.

На *рисунке 10* дан графический образ фрагмента процесса постепенного расширения интервала от примы до октавы. Здесь «неподвижный» звук олицетворяет широкая чёрная стрелка слева, обращённая остриём вниз, а «подвижной» звук – широкая белая стрелка остриём вверх. Обе эти стрелки совмещены остриями в точке нулевых биений в интервале прима. А широкие пунктирные белые стрелки, расположенные правее и направленные остриями на точки нулевых биений в других интервалах, – это положения «подвижно-

го» звука в моменты возникновения интервалов с унисонами в гармониках, номера которых соответствуют интервальным коэффициентам по Пифагору. «Волны» символизируют биения от рассогласования унисонов между этими совпадающими гармониками. Каждую «волну» биений делит надвое вертикальная пунктирная линия. Это – границы между интервалами. Левая часть каждой «полуволны» помечена знаком «+» и означает зону раширения предыдущего интервала, а правая – знаком «–» и означает зону сужения последующего интервала. Эти зоны в музыкальной акустике называют зонами темперации интервалов.

ГРАНИЦЫ И ЗОНЫ ТЕМПЕРАЦИИ МУЗЫКАЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ

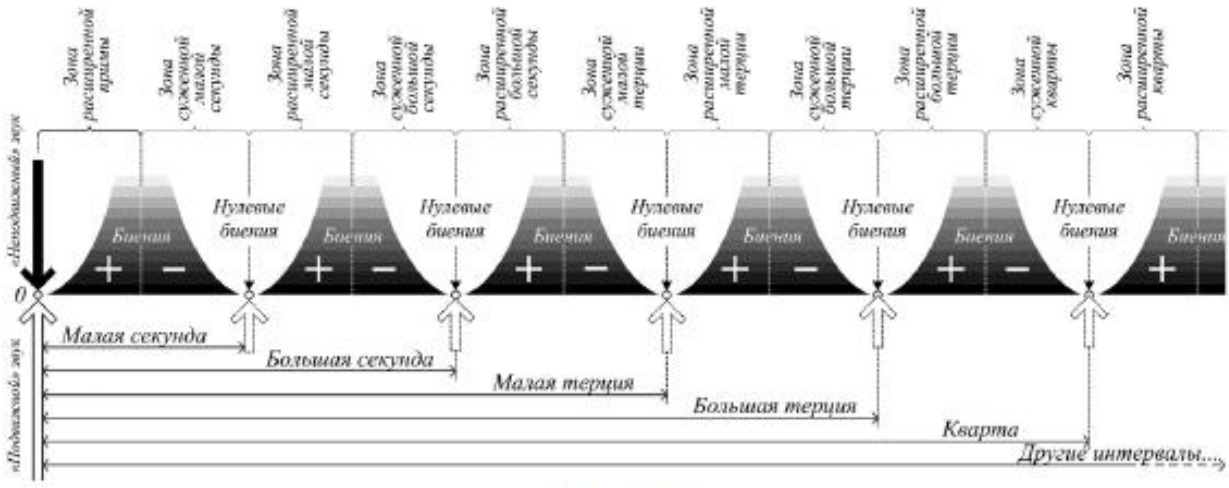

Рис. 10

Здесь следует пояснить правило применения знаков «+» и «–» в качестве обозначений зон темперации интервалов и квалификацию интервалов как «суженный» и «расширенный». Предположим, если в квинте частота $Г^{н}_{1}$ 100 *Гц*, то частота $Г^{в}_{1}$ составит 150 *Гц* (100×3:2), а «унисонная» частота, общая для $Г^{н}_{3}$ и $Г^{в}_{2}$, составит 300 *Гц* (100×3=150×2). Частота биений определяется вычитанием частоты соответствующей интервалообразующей гармоники нижнего звука из частоты соответствующей гармоники верхнего. В случае унисона между $Г^{н}_{3}$ и $Г^{в}_{2}$ разность равна нулю. Но предположим, что «подвижной» звук до точки унисона не дошёл, частота его $Г^{в}_{1}$ 149 *Гц*, а частота $Г^{в}_{2}$ 298 *Гц*, тогда разность составит: 298–300 = –2 *б/сек.* (минус 2 биения в секунду). Если же «подвижной» звук точку унисона перешёл и частота его $Г^{в}_{1}$ 151 *Гц*, а частота $Г^{в}_{2}$ 302 *Гц*, то тогда разность составит: 302–300 = +2 *б/сек.* (плюс 2 биения в секунду). В первом случае – квинта, суженная по отношению к натуральной размерности, а во втором – расширенная.

Рис. 17

СВЯЗЬ ТЕМПОВ БИЕНИЙ В ИНТЕРВАЛАХ С ВЕЛИЧИНАМИ ИХ ДЕФОРМАЦИИ

С давних времён были замечены и по достоинству оценены некоторые особые свойства конструкции «интервал плюс обращение равно октава», и многие настройщики фортепиано используют эти особенности как средство значительного повышения точности строя. Дело в том, что у различных интервалов неодинаковая «чувствительность» к погрешностям или ошибкам, которые могут быть допущены в процессе настройки, то есть к деформациям, на которые интервалы отзываются бóльшим или меньшим изменением своих темпоритмических характеристик. В этом несложно убедиться с помощью следующего примера.

Возьмём чистую октаву $a–a_1$, где стандартные часто́ты основных тонов составляют соответственно 220 и 440 *Гц*, в пределах этой октавы построим от звука *а* все восходящие интервалы с пропорциями тонов по Пифагору, удобные для их точной настройки (с хорошо прослушиваемыми унисонами в совпадающих гармониках), а затем вычислим и сведём в таблицу часто́ты основных тонов вновь образованных звуков. Если частота основного тона одного звука такого интервала известна, то частоту другого вычисляют по формуле:

$$f^н=\frac{f^в\cdot\Gamma^в}{\Gamma^н} \quad \text{или} \quad f^в=\frac{f^н\cdot\Gamma^н}{\Gamma^в},$$

где $f^н$ и $f^в$ – частоты основных тонов нижнего и верхнего звуков, а $\Gamma^н$ и $\Gamma^в$ – номера совпадающих гармоник нижнего и верхнего звуков.

Табл. 2. ЧАСТОТЫ ОСНОВНЫХ ТОНОВ
простых пифагорических интервалов, имеющих общий нижний звук.

Количество полутонов в интервале	Наименование интервала	Буквенное обозначение интервала	Номера совпадающих гармоник $\Gamma^н$ и $\Gamma^в$	Расчёт частоты основного тона верхнего звука интервала (*Гц*)
3	Малая терция	a-c_1	6 и 5	220 · 6 : 5 = 264,0
4	Большая терция	a-$c^♯_1$	5 и 4	220 · 5 : 4 = 275,0
5	Кварта	a-d_1	4 и 3	220 · 4 : 3 = 293,3
7	Квинта	a-e_1	3 и 2	220 · 3 : 2 = 330,0
8	Малая секста	a-f	8 и 5	220 · 8 : 5 = 352,0
9	Большая секста	a-$f^♯_1$	5 и 3	220 · 5 : 3 = 366,67
12	Октава	a-a_1	2 и 1	220 · 2 = 440,0

В *таблице 2* интервалы расположены в порядке возрастания в них количества полутонов.

Теперь понизим общий для всех интервалов звук *а* всего лишь на 0,2 *Гц*. В этом случае частота его основного тона составит 219,8 *Гц*. Понятно, что теперь между совпадающими гармониками всех интервалов должны появиться биения. Сейчас нам заранее известно, что все интервалы будут изменены в сторону расширения, поэтому все результаты мы будем получать со знаком «+»; в противном случае мы бы получили результаты со знаком «–». Обычно в математике перед величиной с положительным значением знак «+» принято опускать. Музыкальная акустика у математики это пра-

вило позаимствовала. Однако биения и в расширенном, и в суженном интервале звучат абсолютно одинаково. И хотя их темпы могут быть равны, это биения разные. И знаки «+» и «-» характеризуют здесь не положительную или отрицательную величину биений, а положительную (шире натуральной) или отрицательную (у́же натуральной) размерность интервала. Кроме натурального строя любой другой музыкальный строй в некоторых или во всех интервалах (кроме прим и октав) в результате их сужения или расширения имеет биения между совпадающими гармониками. При этом достаточно одной-единственной ошибки в выборе зоны темперации одного-единственного интервала, как вся настройка неминуемо зайдёт в тупик, даже если остальные действия безошибочны. Поэтому в целях постоянного напоминания о зонах темперации интервалов мы перед каждым числовым значением биений будем помещать знак «+» или «-», чтобы читатель, впервые знакомящийся с темой «настройка», проникся ощущением важности и нерушимости этого фактора.

Интервал, в котором нарушен унисон между совпадающими гармониками, мы отныне будем называть деформированным. В деформированном интервале частоту биений в совпадающих гармониках рассчитывают по формуле:

$$N_n = f^в \cdot \Gamma^в - f^н \cdot \Gamma^н,$$

где N – число биений в секунду (частота биений);

n – количество полутонов в интервале (или наименование, или буквенное обозначение интервала);

$f^в$ и $f^н$ – частоты основных тонов верхнего и нижнего звуков;

$\Gamma^в$ и $\Gamma^н$ – номера совпадающих гармоник верхнего и нижнего звуков.

Вычислив часто́ты биений во всех деформированных интервалах, расположив эти интервалы в порядке возрастания в них темпов биений и сведя все данные в таблицу (*табл. 3*), мы получаем последовательность интервалов в порядке возрастания их «чувствительности» к погрешности одной и той же величины.

Соразмерность величин удобнее всего оказалось выразить в баллах, приняв самую меньшую величину, в октаве, за 1. Если выявить «чувствительность» к погрешностям остальных интервалов, то она впечатлила бы ещё больше: тритон – 3,5; большая секунда – 4,5; большая септима – 7,5; малая септима – 8; малая секунда – 8,25. Но воспользоваться этим на практике чрезвычайно сложно, поскольку погрешность отзывается не только биениями между совпадающими, но и между другими гармониками (см. *таблицу 1*), которые образуют оболочки фоновых биений разной степени плотности, сквозь которые биения между совпадающими гармониками пробиваются к слуху с большим трудом или не пробиваются вовсе.

Табл. 3. СРАВНИТЕЛЬНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ «ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ» ИНТЕРВАЛОВ К ДЕФОРМАЦИЯМ

Количество полутонов в интервале	Наименование интервала	Номера совпадающих гармоник I^n и I^g	Расчёт частоты биений в интервале (*б/сек.*)	Показатель чувствительности интервала (*в баллах*)
12	Октава	2 и 1	$440 \cdot 1 - 219{,}8 \cdot 2 = +0{,}4$	1
7	Квинта	3 и 2	$330 \cdot 2 - 219{,}8 \cdot 3 = +0{,}6$	1,5
5	Кварта	4 и 3	$293{,}3 \cdot 3 - 219{,}8 \cdot 4 = +0{,}7$	1,75
9	Большая секста	5 и 3	$366{,}67 \cdot 3 - 219{,}8 \cdot 5 = +1{,}0$	2,5
4	Большая терция	5 и 4	$275 \cdot 4 - 219{,}8 \cdot 5 = +1{,}0$	2,5
3	Малая терция	6 и 5	$264 \cdot 5 - 219{,}8 \cdot 6 = +1{,}2$	3
8	Малая секста	8 и 5	$352 \cdot 5 - 219{,}8 \cdot 8 = +1{,}6$	4

Если при настройке общего звука величину погрешности изменить, то абсолютные величины частот биений во всех интервалах изменятся тоже, но соотношение этих частот останется неизменным. Следовательно, «чувствительность» любого интервала к погрешностям тоже есть величина постоянная, а благодаря созданию таблицы у нас появилась возможность оценить практическую пользу знания об этом.

Нарушение натуральной размерности интервала всегда сопряжено с появлением биений между совпадающими гармониками. Чем нарушение меньше, тем биения медленнее и наоборот. Но применительно к категориям интервалов квалификация биений по их темпам как «медленные» или «быстрые» относительна. Как показывает таблица, погрешность одной и той же величины даёт в октаве 0,4 *б/сек.* (1 биение в 2,5 секунды), в малой терции 1,2 *б/сек.*, в малой сексте 1,6 *б/сек.* и т. д. Существует усреднённое представление о способностях слуха воспринимать биения по темпу, в рамках которого зоной уверенного восприятия считают от $^1/_{10}$ *б/сек.* (1 биение в 10 *сек.*) до 30–40 *б/сек.* Здесь, правда, не учтена зона индивидуального комфортного восприятия биений у каждого настройщика в отдельности: один лучше слышит и распознает биения более медленные, другой более быстрые. Многое также зависит от музыкального инструмента. У рояля в отличном рабочем состоянии звучание басовых струн длится 40–50 *сек.*, а у пианино 20–25; теноровые струны звучат около 10 *сек.*; звучание крайних дискантовых струн длится не более 1 *сек.*, а самых крайних – и того меньше. В любом случае выждать в октаве очень редкие и очень плавно нарастающие и так же плавно затихающие по громкости биения, уверенно их расслышать, определить их темп, или то же самое сделать в малой терции с гораздо более динамичными биениями, – это задачи несопоставимой слож-

ности. Биения в октаве звучат, как правило, ярче, но они гораздо менее чётки, чем биения, например, в малой терции, которые звучат тише, но более отчётливо. Поэтому в октаве их распознать по темпу значительно труднее. Однако вследствие естественного старения или искусственного износа музыкального инструмента его акустические характеристики подвергаются изменениям, что уменьшает длительность звучания струн, причём иногда весьма значительно. И тогда времени непрерывного звучания может вообще не хватить на то, чтобы наконец-то проявились биения, предположим, в октаве, но его всегда хватит на то, чтобы они проявились в интервале с более высокой «чувствительностью». Из всего этого следует, что настроить октаву напрямую с той или иной точностью, конечно же, можно, но если настроить её как смежные чистые кварту и квинту, точность настройки октавы возрастёт не менее чем в 1,5 раза; если же настроить её как смежные чистые малую терцию и большую сексту, точность настройки возрастёт в 3 раза и более.

Проиллюстрируем это с помощью расчётов. В музыкальной акустике разработаны формулы, которые в интервале с биениями между совпадающими гармониками позволяют по известной частоте основного тона одного из звуков вычислить частоту основного тона другого звука. Если интервал сужен и известна $f^{н}$, то есть частота основного тона нижнего звука, то:

$$f^{в}=\frac{f^{н}\cdot\Gamma^{н}-N}{\Gamma^{в}},$$

а если у того же интервала известна $f^{в}$, то:

$$f^{н}=\frac{f^{в}\cdot\Gamma^{в}+N}{\Gamma^{н}}.$$

Если же интервал расширен, то в приведённых формулах знак «+» нужно заменить на «-» и наоборот. А теперь произведём расчёты.

Предположим, при настройке напрямую нисходящей октавы от звука a_1 настройщик просмотрел небольшую ошибку, завысив звук *а*, что вызвало сужение октавы и появление в звучании 1 биения в 3 секунды (или 0,33 *б/сек.*). Такое весьма нередко случается на практике, потому что очень медленные биения достаточно сложно контролировать по темпу на слух. В этом случае, если f_{a1} = 440 *Гц*, то:

$$f_a=\frac{440\cdot 1+0{,}33}{2}=220{,}165\ Гц.$$

В звучании этой октавы должны прослушиваться –0,33 б/сек. (220,165×2–440×1= –0,33). Желая настроить октаву поточнее, настройщик разделил её промежуточным звуком c_1 на малую терцию внизу и большую

сексту вверху и позаботился о том, чтобы большая секста (интервальная пропорция 5/3) была акустически чистой. При таком условии частота основного тона c_1 составит:

$$f_{c_1} = \frac{440 \cdot 3}{5} = 264\ Гц.$$

Теперь, имея величины частот основных тонов обоих звуков малой терции (интервальная пропорция 6/5), несложно установить, есть ли в ней биения; а если есть, то возникли они вследствие сужения (–) или расширения (+) интервала, и какова их частота.

$$N_{a\text{-}c1} = 264 \cdot 5 - 220{,}165 \cdot 6 = -\ 0{,}99\ б/сек.\ (\approx -1\ б/сек.)$$

Нельзя не согласиться с тем, что обнаружить и устранить в малой терции 1 биение в секунду намного легче, чем в октаве 1 биение в 3 *сек*. Для этого настройщику необходимо всего лишь понизить звук *a* до полного исчезновения биений в малой терции $a–c_1$, и октава $a–a_1$ окажется настроенной в 3 раза точнее, чем кагда её настроили напрямую.

Вышеописанное правило применимо также и к квинте, если её рассматривать как сумму малой и большой терций (вне зависимости от их взаиморасположения в габаритах квинты). Несмотря на то, что малая и большая терции друг другу несоразмерны, в сумме они всегда соразмерны квинте. По сравнению с «чувствительностью» квинты, «чувствительность» большой терции выше в 1,67 раза, а малой в 2. Поэтому акустически чистая квинта, настроенная как сумма двух акустически чистых терций, малой и большой, будет значительно точнее, чем квинта, настроенная напрямую.

Приём точной настройки октав по контролю биений в интервалах и их обращениях известен настройщикам с незапамятных времен. Благодаря ему существовали и исторически развивались две параллельные методики настройки: простая, где октавы, к которым предъявляют наивысшие требования по точности, настраивают напрямую, и прецизионная (от фр. *précision* – «точность»), в которой их всегда настраивают как конструкции «интервал плюс обращение».

В конструкции «интервал плюс обращение» была обнаружена ещё одна зна́чимая закономерность, которая легла в основу приёмов настройки фортепиано даже по самым прогрессивным современным технологиям. Для ознакомления с этой закономерностью рассмотрим конструкцию «квинта плюс кварта» в пределах октавы $a–a_1$ с частотами тонов 220 и 440 *Гц*. Общим звуком для квинты внизу и кварты вверху будет звук e_1. В этом случае частота основного тона e_1, определяемая по звуку *a* и интервальной пропорции квинты 3/2, составит:

$$220 \cdot 3 : 2 = 330\ Гц.$$

Тот же результат мы получаем, определяя частоту основного тона e_1 по звуку a_1 и интервальной пропорции кварты 4/3:

$$440 \cdot 3 : 4 = 330\ Гц.$$

Теперь «перевернём» конструкцию так, чтобы кварта оказалась внизу, а квинта вверху. И тогда общим звуком для обоих интервалов станет d_1. Вычислим частоту его основного тона отдельно по a и по a_1.

$$220 \cdot 4 : 3 = 293{,}333\ Гц. \qquad 440 \cdot 2 : 3 = 293{,}333\ Гц.$$

Во всех вышеприведённых случаях октава, квинты и кварты акустически чисты и не имеют биений. А теперь выясним, как на обоих интервалах конструкции и на конструкции в целом отразится изменение положения общего для пары «интервал-обращение» звука, если его понизить или повысить. Если в конструкции $a–d_1–a_1$, где кварта внизу, а квинта вверху, частоту d_1 понизить, предположим, на 0,333 *Гц* и она составит 293 *Гц*, то в кварте $a–d_1$ мы услышим:

$$N_{a\text{-}d1} = 293 \cdot 3 - 220 \cdot 4 = -1\ б/сек.,$$

а в квинте $d_1–a_1$ услышим:

$$N_{d1\text{-}a1} = 440 \cdot 2 - 293 \cdot 3 = +1\ б/сек.$$

Если же частоту d_1 не понизить, а повысить, предположим, до 294 *Гц*, то в звучании кварты мы услышим:

$$N_{a\text{-}d1} = 294 \cdot 3 - 220 \cdot 4 = +2\ б/сек.;$$

а в звучании квинты услышим:

$$N_{d1\text{-}a1} = 440 \cdot 2 - 294 \cdot 3 = -2\ б/сек.$$

Вывод: когда в конструкции кварта внизу и квинта вверху, любое изменение высоты общего звука отзывается на обоих интервалах абсолютно одинаковыми частотами биений, соотношение которых составляет 1:1, но эти биения возникают в противоположных зонах темперации (один интервал сужается, а другой расширяется). А от того, понижен общий звук или повышен, интервалы всего лишь меняются знаками. Если конструкцию «перевернуть», чтобы кварта и квинта поменялись местами, то общим звуком станет e_1 и результат мы получим несколько иной. Если частоту основного тона e_1 понизить на 1 *Гц*, то в звучании квинты мы услышим:

$$N_{a\text{-}e1} = 329 \cdot 2 - 220 \cdot 3 = -2\ б/сек.;$$

а в звучании кварты услышим:

$$N_{e1\text{-}a1} = 440 \cdot 3 - 329 \cdot 4 = +4\ б/сек.$$

Если частоту основного тона e_1 повысить на 1 *Гц*, то в звучании квинты мы услышим:

$$N_{a\text{-}e_1} = 331 \cdot 2 - 220 \cdot 3 = +2 \text{ б/сек.};$$

а в звучании кварты услышим:

$$N_{e_1\text{-}a_1} = 440 \cdot 3 - 331 \cdot 4 = -4 \text{ б/сек.}$$

Итак, если в конструкции квинта внизу, а кварта вверху, то часто́ты и темпы биений в этих интервалах всегда будут иметь соотношение 1:2, а знаками интервалы меняются по той же причине, что и в первом случае. Обратим внимание на номера совпадающих гармоник всех звуков в конструкции и проследим связь через них частот тонов с темпами биений.

Проиллюстрируем эту связь с помощью схемы (*рис.18*) и одновременно сформулируем правила, из которых достаточно запомнить любое, чтобы безо всяких расчётов определить, каким будет соотношение биений в интервалах и их обращениях в любой конструкции.

СООТНОШЕНИЕ ТЕМПОВ БИЕНИЙ
в интералах и их обращениях

Рис. 18

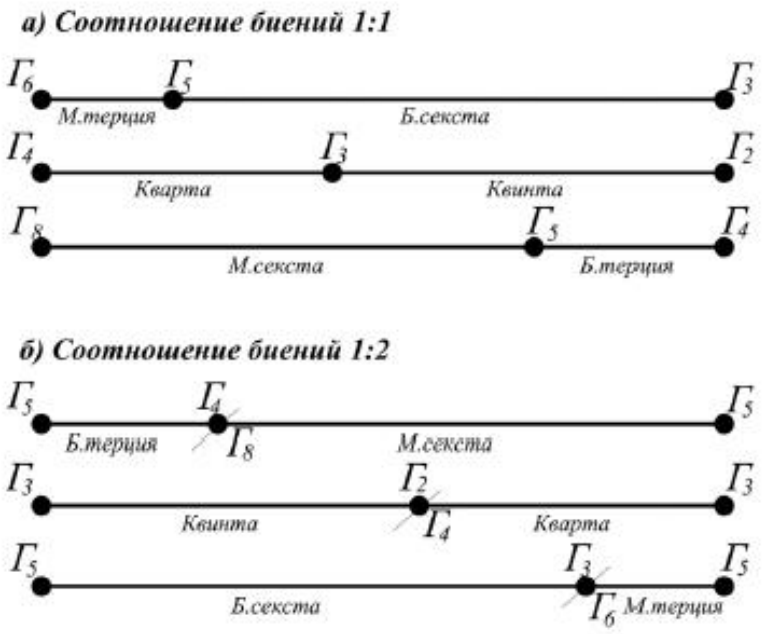

Рис. 18

Правило первое. Если у совпадающей гармоники самого нижнего звука конструкции номер чётный, то соотношение биений в нижнем и верхнем интервалах конструкции всегда составляет 1:1; если у совпадающей гармоники самого нижнего звука конструкции номер нечётный, то соотношение биений в нижнем и верхнем интервалах конструкции всегда составляет 1:2.

Правило второе. Если серединный звук конструкции участвует в интервалах конструкции одной и той же гармоникой, то соотношение биений

в интервалах составляет 1:1, если же разными гармониками, то соотношение составит 1:2.

Правило третье. Если самый нижний и самый верхний звук конструкции участвуют в интервалообразовании разными гармониками, то соотношение биений составляет 1:1, а если одинаковыми гармониками, то соотношение составит 1:2.

Правило четвертое, наиболее легко запоминаемое. Если нижний интервал – кварта или имеет в наименовании определение «малая», то соотношение биений всегда составляет 1:1; если же нижний интервал – квинта или имеет в наименовании определение «большая», то соотношение биений всегда составляет 1:2.

Особенности «поведения» тритонов и их обращений (тоже тритонов) заслуживают отдельного рассмотрения.

В теории музыки интервалы подразделяют не только на чистые, малые и большие, но ещё и на уменьшенные и увеличенные. Уменьшенные или увеличенные интервалы – это все уже знакомые нам интервалы, уменьшенные или увеличенные на полутон без изменения их основного наименования. Если в акустике, как мы помним, чистым называют интервал без биений, то есть чистый акустически, то в теории музыки «чистая» означает: не малая, не большая, не уменьшенная и не увеличенная. Чистые интервалы обращаются в чистые (например, прима в октаву и наоборот, квинта в кварту и наоборот), малые обращаются в большие (например, малая терция в большую сексту) и наоборот, уменьшенные интервалы обращаются в увеличенные (например, уменьшенная квинта в увеличенную кварту, увеличенная терция в уменьшенную сексту) и наоборот. В этом контексте тритон – это либо кварта, увеличенная на полтона (увеличенная кварта), либо квинта, уменьшенная на полтона (уменьшенная квинта), которые обращаются друг в друга. Поскольку интервал и его обращение, оба с пифагоровыми соотношениями тонов, всегда составляют в сумме чистую октаву, вполне логично было бы предположить, что тритон с соотношением тонов 7/5 и его обращение, тоже тритон с таким же соотношением, в сумме должны составить чистую октаву. Однако на тритоны это правило не распространяется и убедиться в этом несложно.

Построим восходящий тритон от звука a и нисходящий от звука a_1 как две уменьшенные квинты с пифагоровыми соотношениями тонов 7/5. Восходящая чистая квинта от a – это $a–e_1$. Чтобы при неизменном звуке a превратить её в тритон, то есть в уменьшенную квинту, необходимо звук e_1 понизить на полтона, и тогда он превратится в звук $e^{\flat}_1$. Если частота основного тона звука a 220 *Гц*, то частота основного тона звука $e^{\flat}_1$ в уменьшенной квинте $a–e^{\flat}_1$ составит:

$$220 \cdot 7 : 5 = 308 \text{ Гц}.$$

Нисходящая квинта от a_1 – это $d_1–a_1$. Чтобы при неизменном a_1 уменьшить её на полтона, необходимо повысить на полтона звук d_1, и тогда он превратится в звук $d^{\sharp}_1$.

Если частота основного тона звука a_1 440 *Гц*, то частота основного тона звука $d^{\sharp}_1$ в уменьшенной квинте $d^{\sharp}_1$-a_1 составит:

$$440 \cdot 5 : 7 = 314{,}29\ Гц.$$

В теории музыки звуки $e^{\flat}_1$ и $d^{\sharp}_1$ называют энгармонически равными, потому что они имеют различные наименования, хотя по высоте должны быть равны (в частности, на фортепиано оба они извлекаются нажимом на одну и ту же клавишу). Но в нашем примере часто́ты их тонов оказались неравными. А поскольку от частот тонов зависит размерность интервалов с участием этих тонов, то два тритона с соотношением 7/5 оказались в сумме у́же чистой октавы. Тот же результат мы получим, оперируя тритонами как двумя увеличенными квартами, или одним как увеличенной квартой, а другим как уменьшенной квинтой; или если два тритона построить как восходящие смежные от звука *a*, или как нисходящие смежные от звука a_1. Разность от вычитания из чистой октавы двух тритонов с соотношениями тонов 7/5 в пересчёте на интервал составляет чуть менее $^1/_6$ целого тона или, точнее, 34,97 цента. Вывод: чтобы в сумме быть соразмерными октаве, один тритон должен иметь соотношение 7/5, а другой 10/7, о чём уже было сказано, но тогда четыре малые терции, в сумме составляющие октаву, две из которых составляют один тритон, должны быть разноразмерными. Или, если делать тритоны равноразмерными, оба они непременно должны быть расширенными на 17,485 цента. Причём расчёты показывают, что равномерное расширение смежных тритонов до обеспечения их общему звуку энгармонического равенства даёт в звучании обоих тритонов некратные часто́ты биений между $Г^{н}_{7}$ и $Г^{в}_{5}$, которые соотносятся как 1:1,4142 (то есть приблизительно 1:1,4).

Мы рассмотрели практически все варианты кооперации простых интервалов и их обращений в габаритах чистой октавы. Но закономерности существуют также в кооперациях простых интервалов и октав в составных интервалах, что создаёт для настройщика фортепиано дополнительные возможности повышения точности строя. Сформулируем и для них соответствующие правила.

Правило первое. Если каждая октава в отдельности акустически чиста и не имеет биений, то двойные, тройные и более октавы тоже не имеют биений.

Правило второе. Если простой интервал не имеет биений, то составной интервал, в который входит этот простой интервал, тоже не имеет биений.

Правило третье. Если простой интервал имеет биения и чётный номер $Г^{в}$, то составной интервал, восходящий от его нижнего звука, имеет равные с ним биения. Например, у построенных от общего звука восходящих большой терции, большой децимы и большой децимы через октаву, а также у квинты и дуодецимы часто́ты биений теоретически равны. А составной интервал, нисходящий от верхнего звука простого интервала с чётной гамоникой верхнего звука, будет иметь биения, частота которых вдвое ниже.

Правило четвёртое. Если простой интервал имеет биения и нечётный номер $Г^{n}$, то составной интервал, восходящий от его нижнего звука, имеет биения, частота которых вдвое выше; а составной интервал, нисходящий от его верхнего звука, имеет равные биения. Например, у построенных от общего звука нисходящих большой сексты и большой терцдецимы часто́ты биений теоретически равны (почему здесь допущена оговорка «теоретически», читателю станет понятно после ознакомления с феноменом негармоничности обертонов).

Знание этих закономерностей помогает настройщику точнее переносить настроенные звуки области темперирования на басовый и дискантовый регистры. Приёмы, в которых полезно использовать вышеописанные особенности кооперации простых и составных интервалов, мы рассмотрим в описании процессов настройки басового и дискантового регистров фортепиано, а также в некоторых системах исторических настроек.